Proceedings of International Conference on Scientific Research in Natural and Social Sciences
Hosted online from Toronto, Canada.
Date: 5th October, 2024
ISSN: 2835-5326 **Website:** econferenceseries.com

BIR O`ZGARUVCHILI FUNKSIYA EKSTREMUMINING ZARURIY SHARTI

Abjalilov Sanaqul Xo`jamovich
Navoiy davlat pedagogika instituti dotsenti

Sadullayeva Iroda Pulat qizi
Navoiy davlat pedagogika instituti o`qituvchisi

Kalit so`zlar: Minimum, maksimum, ekstremum, zaruriy sharti, yetarli sharti, kritik nuqta, statsionar nuqta.

Funksiya hosilalari yordamida uning ekstremum nuqtalarini topish osonlashadi. Avval ekstremumnin zaruriy shartini ifodalovchi teoremani keltiramiz.

Teorema. Agar $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada uzluksiz, shu nuqtada ekstremumga ega bo‘lsa, u holda bu nuqtada $f(x)$ funksiyaning hosilasi nolga teng yoki mavjud emas.

Isboti. Faraz qilaylik $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada maksimumga ega bo‘lsin. U holda x_0 nuqtaning shunday $(x_0-\delta;\ x_0+\delta)$ atrofi mavjud bo‘lib, bu atrofdan olingan $\forall x$ uchun $f(x_0)>f(x)$ bo‘ladi. Agar $x>x_0$ bo‘lsa, u holda $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}<0$ tengsizlik, agar $x<x_0$ bo‘lsa, u holda $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}>0$ tengsizlik o‘rinli bo‘lishi ravshan.

Bu tengsizliklar chap tomonidagi ifodalarning $x\to x_0$ da limiti mavjud bo‘lsa, u holda

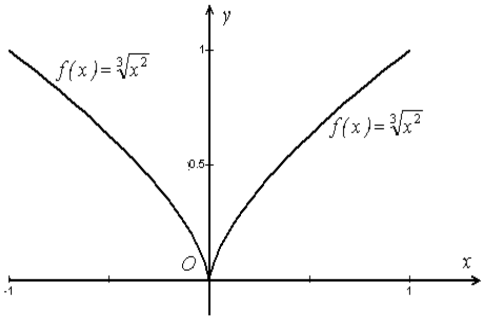
$$\lim_{x\to x_0+0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0+0)\le 0,\quad \lim_{x\to x_0-0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0-0)\ge 0 \text{ bo‘ladi.}$$

Agar funksiyaning chap $f'(x_0-0)$ va o‘ng $f'(x_0+0)$ hosilalari nolga teng bo‘lsa, u holda funksiya hosilasi $f'(x_0)$ mavjud va nolga teng bo‘ladi.

Agar $f'(x_0-0)$ va $f'(x_0+0)$ lar noldan farqli bo‘lsa, ravshanki $f'(x_0+0)<f'(x_0-0)$ bo‘lib, $f'(x_0)$ mavjud bo‘lmaydi.

Funksiya x_0 nuqtada minimumga ega bo‘lgan hol ham yuqoridagi kabi isbotlanadi. Teorema isbot bo‘ldi.

1-misol. Ma’lumki, $f(x)=|x|$ funksiyaning $x=0$ da hosilasi mavjud emas. Bu funksiya $x=0$ nuqtada minimumga ega



2-misol. $f(x)=\sqrt[3]{x^2}$ bo‘lsin.

2-chizma

$$f'(-0)=\lim_{x\to-0}\frac{\sqrt[3]{x^2}}{x}=\lim_{x\to-0}\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}=-\infty,\quad f'(+0)=\lim_{x\to-0}\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}=+\infty$$

bo‘lgani uchun $x=0$ nuqtada funksiyaning ham hosilasi mavjud emas. Ammo bu funksiya $x=0$ nuqtada minimumga ega bo‘lishi ravshandir. (2- chizma)

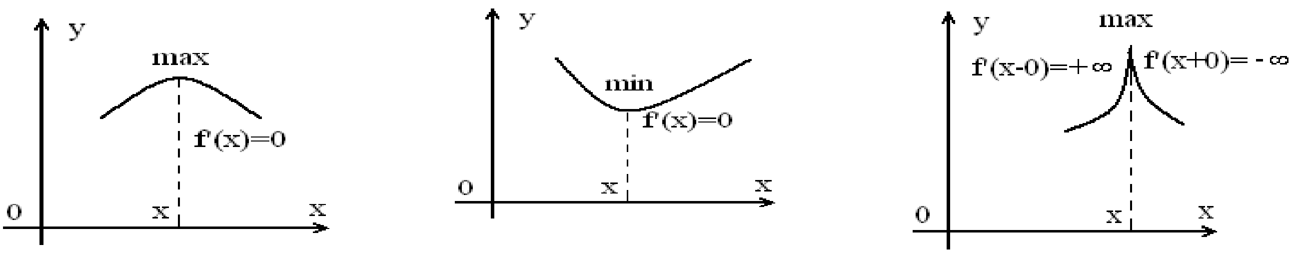
Ta’rif. Funksiya hosilasini nolga aylantiradigan nuqtalar yoki hosila mavjud bo‘lmaydigan nuqtalar funksiyaning **kritik nuqtalari** deb ataladi. Funksiya hosilasi nolga teng bo‘lgan nuqtalar **statsionar nuqtalar** deb ataladi.

Har qanday kritik nuqta funksiyaning ekstremal nuqtasi bo‘lavermaydi.

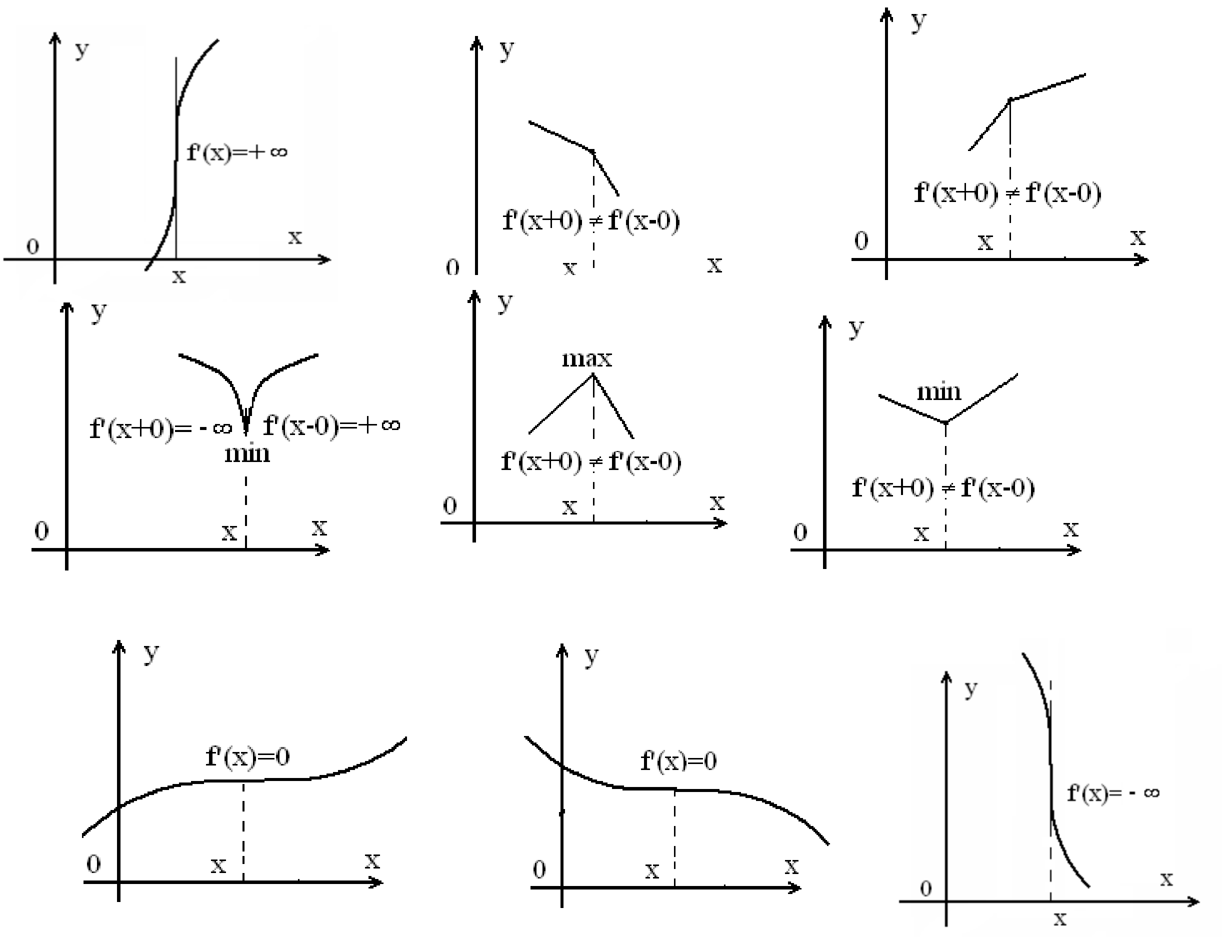
Masalan: $f(x)=(x-1)^3$, $f'(x)=3(x-1)^2$, $f'(1)=0$ bo‘lib, $x_0=1$ kritik nuqta. Lekin $x_0=1$ nuqtaning ixtiyoriy atrofida $f(1)=0$ eng kichik, yoki eng katta qiymat bo‘la olmaydi. Chunki har bir atrofda noldan kichik va noldan katta qiymatlar istalgancha bor.

Demak, $f(x)$ funksiyaga ekstremum qiymat beruvchi nuqtalarni funksiyaning statsionar nuqtalari,funksiyaning hosilasi mavjud bo`lmagan nuqtalar, funksiyanung hosilasi cheksiz bo`lgan nuqtalar orasidan izlash kerak ekan.Odatda bunday nuqtalar ekstremumga **shubhali nuqtalar** deyiladi.

Quyida funksiya grafigining kritik nuqta atrofidagi holatlari tasvirlangan (3-chizma).



Date: 5th October, 2024
ISSN: 2835-5326 Website: econferenceseries.com



Teorema. Faraz qilaylik $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada uzluksiz va x_0 nuqta funksiyaning kritik nuqtasi bo‘lsin.

a) Agar $\forall x\in(x_0-\delta;x_0)$ uchun $f'(x)>0$, $\forall x\in(x_0;\ x_0+\delta)$ uchun $f'(x)<0$ tengsizliklar o‘rinli bo‘lsa, ya’ni $f'(x)$ hosila x_0 nuqtadan o‘tishida o‘z ishorasini «+» dan «-» ga o‘zgartirsa, u holda f(x) funksiya x_0 nuqtada maksimumga ega bo‘ladi.

b) Agar $\forall x\in(x_0-\delta;x_0)$ uchun $f'(x)<0$, $\forall x\in(x_0;\ x_0+\delta)$ uchun $f'(x)>0$ tengsizliklar o‘rinli bo‘lsa, ya’ni $f'(x)$ hosila x_0 nuqtadan o‘tishda o‘z ishorasini «-» dan «+» ga o‘zgartirsa, u holda $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada minimumga ega bo‘ladi.

c) Agar $f'(x)$ hosila x_0 nuqtadan o‘tishda o‘z ishorasini o‘zgartirmasa, u holda $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada ekstremumga ega bo‘lmaydi.

ISSN: 2835-5326 Website: econferenceseries.com

Isbot. a) Holni qaraymiz. Bu holda $\forall x\in(x_0-\delta;x_0)$ uchun $f'(x)>0$ bo‘lishidan $f(x)$ funksiyaning $(x_0-\delta;\ x_0)$ da qat’iy o‘suvchiligi kelib chiqadi. So‘ngra shartga ko‘ra $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada uzluksiz bo‘lgani sababli

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x)=\lim_{x\to x_0+0} f(x)=f(x_0) \qquad (1)$$

tenglik o‘rinli. Demak, $\forall x\in(x_0-\delta;\ x_0)$ uchun

$$f(x)<f(x_0) \qquad (2)$$

bo‘ladi. $\forall x\in(x_0;\ x_0+\delta)$ uchun $f'(x)<0$ bo‘lishidan f(x) funksiyaning $(x_0;\ x_0+\delta)$ da qat’iy kamayuvchiligi kelib chiqadi. Demak, (1) tenglikni e’tiborga olsak, $\forall x\in(x_0;x_0+\delta)$ uchun yana (2) tengsizlik bajariladi. Bundan $\forall x\neq x_0$ va $\forall x\in(x_0-\delta;x_0+\delta)$ uchun $f(x)<f(x_0)$ bo‘ladi, ya’ni $f(x)$ funksiya $x_0$nuqtada maksimumga ega.

b) Bu holda $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada minimumga erishishi (a) holga o‘xshash isbotlanadi.

$f'(x)$ hosila $x_0$nuqtadan o‘tishda o‘z ishorasini o‘zgartirmaydigan (c) holda $f(x)$ funksiya x_0 nuqtaning $(x_0-\delta;\ x_0+\delta)$ atrofida qat’iy o‘suvchi yoki qat’iy kamayuvchi bo‘ladi. Demak, $x_0$nuqtada yo‘q.

Demak funksiyani ekstremumini topishda funksiya hosilasi ishorasining o`zgarishi,ekstremum mavjudligining yetarli sharti bo`lib, zaruriy sharti emas bo`la olmas ekan.

Eslatma. Yuqoridagi mulohazalarda $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada uzluksiz bo‘lishi muhim. Masalan, ushbu

$f(x)=\begin{cases} x^4, & agar\ \ x\neq 0, \\ 1, & agar\ \ x=0 \end{cases}$ funksiyani qaraylik. Bu funksiya uchun $f'(x)=4x^3$ bo‘lib, hosila $x=0$ nuqtadan o‘tishda o‘z ishorasini «-» dan «+» ga o‘zgartirsa ham, berilgan funksiya $x=0$ nuqtada minimumga ega emas.

Eslatma. x_0 nuqtaning chap tomonidan o‘ng tomoniga o‘tganda hosila ishorasini o‘zgartirmasa ham bu nuqta funksiyaning ekstremum nuqtasi bo‘lishi mumkin.

Masalan, $f(x)=\begin{cases} -x, & x\leq 1, \\ 2-x, & x>1 \end{cases}$ funksiya uchun $x=1$ (minimum) nuqta bo‘ladi. Haqiqatdan, $x=1$ ning (0;2) atrofidagi barcha nuqtalar uchun $f(x)\geq f(1)=-1$ tengsizlik o‘rini bo‘ladi. Shu bilan birga $x<1$ va $x>1$ nuqtalar uchun $f'(x)=-1<0$, ya’ni hosila ishorasini o‘zgartirmaydi.

ISSN: 2835-5326 Website: econferenceseries.com

$y = f(x)$ funksiyaga ekstremum qiymat beruvchi nuqtalarni birinchi tartibli hosila yordamida tekshirish qoidasi:

1. $f^{`}(x)$ hosila topiladi.
2. $y = f(x)$ funksiyaning kritik nuqtalari, ya`ni $f^{`}(x)$ hosila nolga aylanadigan yoki uzilishga ega bo`lgan nuqtalar topiladi.
3. Topilgan kritik nuqtalar $f(x)$ funksiyaning aniqlanish sohasini oraliqlarga ajratadi, shu oraliqlarda $f^{`}(x)$ hosilaning ishorasi tekshiriladi.
4. Funksiyaning ekstremum nuqtalardagi qiymatlari hisoblanadi.

1-misol. $y = 2x^3 - 6x^2 - 48x - 17$

Funksiyaning ekstremum qiymatlarini toping.

Yechish. Ushbu funksiyani ekstremum qiymatlarini topamiz buning uchun.

a) funksiyadan hosila olamiz

$y^{`} = 6x^2 - 12x - 48$ ga ega bo`lamiz

b) kritik nuqtalarini topamiz.

$6x^2 - 12x - 48 = 0 \quad \div 6$

$x^2 - 2x - 8 = 0 \quad x_1 = -2 \qquad x_2 = 4$

c) Endi ushbu kritik nuqtalarni ishorasini tekshiramiz.

"+" dan "-" ga o`tgani uchun $x = -2$ maksimum nuqta

"-" dan "+" ga o`tgani uchun $x = 4$ minimum nuqta

d) ekstremal qiymatlarni toppish uchun topilgan ekstremal nuqtalarni funksiyaga etib qo`yamiz.

Bunda

$y(-2) = 41 \quad y(4) = -177$

Demak $y_{mak} = 41 \qquad y_{min} = -177$ ga ega bo`lamiz.

Masala. Moddiy nuqta $S(t) = 12t^2 - \frac{2}{3}t^3$ qonunga binoan to`g`ri chiziq bo`ylab harakat qilmoqda, bunda $S(t)$ –metrlarda hisoblangan vaqt. $[4; 10]$ Oraliqqa tegishli qanday vaqt paytida nuqta harakatining tezligi eng katta bo`ladi va bu tezlik qanday kattalikda bo`ladi?

Yechish. Biz bilamizki yo`ldan olingan hosila tezlikni, tezlikdan olingan hosila esa tezlanishni beradi. Shu sababli berilgan harakat tenglamasidan hosila olamiz.

$$s'(t) = v(t) = 24t - 2t^2$$

$$v(t) = 24t - 2t^2$$

Ushbu tezlik tenglamasidan hosila olib, nolga tenglashtirsak kritik nuqtaga ega bo`lamiz.

$v'(t) = 0 \quad 24 - 4t = 0 \quad t = 6$ bu nuqta bizga berilgan oraliqda bor .

Endi $t = 6$ da va oraliqning chetki nuqtalaridagi tezlikning qiymatlarini topamiz va ular ichidan eng kattasini yechim sifatida olamiz. Chunki masala shartida tezligi eng katta bo`lishi kerakligi talab qilingan

$v(6) = 72 \quad v(4) = 64 \quad v(10) = 40$

Tezlik eng katta bo`ladigan vaqt $t = 6$ da ekan.

Misol. $y = \frac{x^2}{x-2}$ funksiyani ekstremumlarini toping.

Yechish. Avvalo ushbu funksiyadan hosila olib, nolga tenglashtirib,kritik nuqtalarni topib olamiz.

$$y' = \frac{2x(x-2) - x^2}{(x-2)^2} = \frac{x^2 - 4x}{(x-2)^2} = \frac{x(x-4)}{(x-2)^2}$$

$$\frac{x(x-4)}{(x-2)^2} = 0$$

$x = 0 \quad x = 4 \quad x = 2$ kritik nuqtalarni funksiya hosilasidagi ishorasini tekshiramiz.

Tekshirganimizda $x_{max} = 0 \quad x_{min} = 4$ bo`ladi.

$$y_{max} = 0 \qquad y_{min} = 8$$

Foydalanilgan adabiyotlar ro'yxati

1. "Algebra va analiz asoslari 10-11 " (darslik) A.N Kolmogorov, A. M. Abramov . Yu. P. Dudnisin, B .M. Ivlev, S. I. Shvarsburg. Toshkent "o'qituvchi" 1992
2. "Funksiyalar va grafiklar" A. Gaziyev, I. Isroilov, M. Yaxshiboyev " Voris-Nashriyot" Toshkent 2006
3. "Matematik analizdan misol va masalalar yechish" T. Sharipova, E . Yo'ldoshev, "o'qituvchi" Toshkent 1996
4. "Oliy matematika 1" Yo. U. Soatov, Toshkent "o'qituvchi" 1992 - yil
5. "Variatsion hisob va optimal boshqaruv" I. Isroilov, S. Otaqulov Samarqand 2012
6. "Matematikani takrorlang" A. U .Umirbekov, Sh.Sh.Shaabzalov. "o'qituvchi" Toshkent 1989-yil

7. "Matematik analiz 1" Toshmetov O', Turgunbayev R, Saydamatov E, Madirimov M Toshkent "Extremum-press" 2015-yil
8. "Oliy matematika" Sh. I. Tojiyev Toshkent " O`zbekiston " 2002-yil