BIR NECHA O'ZGARUVCHILI FUNKSIYANING EKSTREMUMLARI

Abjalilov Sanaqul Xo`jamovich
Navoiy davlat pedagogika instituti dotsenti

Sadullayeva Iroda Pulat qizi
Navoiy davlat pedagogika instituti o`qituvchisi

Kalit so`zlar: Minimum, maksimum, ekstremum, zaruriy sharti, yetarli sharti, kritik nuqta.

$Z = f(x\,;\,y)$ funksiya biror ∂ sohada aniqlangan va $P_0(x_0\,;\,y_0)$ nuqta ∂ sohaning ichki nuqtasi bo'lsin.

Agar $P_0(x_0\,;\,y_0)$ nuqtaning δ atrofida olingan barcha $P(x,y)$ nuqtlar uchun $f(x_0\,,y_0) > f(x\,,y)$ $(f(x_0\,;\,y_0) < f(x\,;y)$ bo'lsa $f(x\,;\,y)$ funksiya $P_0(x_0\,;\,y_0)$ nuqtada maksimumga (minimumga) ega deyiladi.

Funksiyaning maksimumi va minimum funksiyaning ekstremumlari deyiladi.

Ekstremumlarning zaruriy sharti

Teorema:Agar differensiallanuvchi funksiya $Z = f(x\,;\,y)$ $P_0(x_0\,;\,y_0)$ nuqtada ekstremumga ega bo'lsa, u holda uning shu nuqtadagi xususiy hosilalari nolga teng bo'lishi zarur:

$$f'_x(x_0\,,y_0) = 0 \qquad f'_y(x_0\,,y_0) = 0$$

Funksiya differensiallanuvchi bo'lmagan nuqtalar ham uzluksiz funksiyaning ekstremum nuqtalari bo'lshi mumkun (yani xususiy hosilalardan aqali bittasi mavjud bo'lmasligi yoki cheksizlikka teng bo'lishi mumkin).

Masalan, ushbu

$$Z = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Funksiya koordinata boshida minimumga ega bo'lishi aniq, lekin u bu nuqtada differensiallanuvchi emas. Bu funksiya grafigi uchi koordinata boshida bo'lgan va o'qi oz o'qi bilan ustma-ust tushuvchi doiraviy konus.

Tarif: Xususiy hosilalar nolga teng bo'ladigan, mavjud bo'lmaydigan yoki cheksizlikka teng bo'ladigan nuqtalar **kritik nuqtalar** deb ataladi.

Funksiyaning kritik nuqtalarini topish uchun ikkala xususiy hosilasini nolga tenglash va hosil bo'lgan ikki o'zgaruvchili ikkita tenglama sistemasini yechish kerak.

E- Conference Series
Open Access | Peer Reviewed | Conference Proceedings
E- CONFERENCE SERIES

ISSN: 2835-5326 Website: econferenceseries.com

Bundan tashqari, xususiy xususiy hosilalari mavjud bo'lmaydigan nuqtalarni topish ham kerak.

Ekstremumning yetarlik sharti

$P_0(x_0\,;\,y_0)$ nuqta kritik nuqta bo'lsin.

Quyidagi:

$$A = f''_{xx}(x_0\,,y_0)B = f''_{xy}(x_0\,,y_0)C'' = f''_{yy}(x_0\,,y_0)$$
$$\Delta = AC - B^2$$

belgilanishini kiritamiz.

Agar $Z = f(x\,;\,y)$funksiya $P_0(x_0\,;\,y_0)$ kritik nuqtani o'z ichiga olgan biror sohada uchinchi tartibgacha uzluksiz xususiy hosilaga ega bo'lsa, u holda:

1. $\Delta > 0$ $A < 0$ bo'lsa $f(x\,;\,y)$ funksiya $P_0(x_0\,;\,y_0)$ nuqtada maksimumga ega bo'ladi.
2. $\Delta < 0$ $A > 0$ bo'lsa, $f(x\,;\,y)$ funksiya $P_0(x_0\,;\,y_0)$ nuqtada minimumga ega bo'ladi.
3. $\Delta < 0$bo'lsa, $f(x\,;\,y)$ funksiya $P_0(x_0\,;\,y_0)$ nuqtada maksimumga ham, minimumga ham ega bo'lmaydi.
4. $\Delta = 0$ bo'lsa, $f(x\,;\,y)$ funksiya $P_0(x_0\,;\,y_0)$ nuqtada ekstremumga ega bo'lishi ham bo'lmasligi ham mumkun.

Misol: Ushbu $Z = x^2 + y^2 - 3xy = f(x\,;y)$ funksiyani maksimum va minimumga tekshiring.

Yechim:$Z = x^2 + y^2 - 3xy$ funksiyani xususiy hosilalarini topamiz.

$$f'x = 3x^2 - 3y \qquad f'y = 3y^2 - 3x$$

Ushbu xususiy hosilalarni 0 ga tenglashtirib quyidagi sistemaga ega bo'lamiz.

$$\begin{cases} 3x^2 - 3y = 0 \\ 3y^2 - 3x = 0 \end{cases} \text{ yoki } \begin{cases} y = x^2 \\ x = y^2 \end{cases} \text{ sistemani yechganimizda}$$

$$x_1 = 0y_1 = 0$$
$$x_2 = 1y_2 = 1$$

yani $P_0(0\,;\,0)$ va $P_1(1\,;\,1)$ kritik nuqtalarga ega bo'lamiz.

Endi ikkinchi xususiy hosilalarni topamiz

$$f''x^2(x\,,y) = 6xf''xy(x\,,y) = -3$$

ISSN: 2835-5326 Website: econferenceseries.com

$f''y^2(x\,,y) = 6y$ ga ega bo'lamiz.

Birinchi kritik nuqtani tekshirib ko'ramiz. $P_0(0\,;\,0)$

$$A = f''x^2(0\,,0) = 0B = f''xy(0\,,0) = -3C = f''y^2(0\,,0) = 0\Delta = AC - B^2 = -9 < 0$$

Demak $P_0(0\,,0)$ nuqtada ekstremum yo'q.

Ikkinchi kritik nuqtani tekshirib ko'ramiz:

$$P(1\,;\,1)$$
$$A = f''x^2(1\,,1) = 6$$
$$B = f''xy(1\,,1) = -3$$
$$C = f''y^2(1\,,1) = 6$$

$\Delta = AC - B^2 = 27 > 0$ $\qquad A > 0$

Demak $P(1\,;\,1)$ nuqtada berilgan funksiya minimumga ega , bunda

$Z_{min} = f(1\,,1) = 1 + 1 - 3 = -1.$

Misol. $\boldsymbol{z = e^{\frac{x}{2}}(x + y^2)}$ funksiyani ekstremum nuqtalarini toping.

Yechish. Avvalo kritik nuqtalarni topamiz. Buning uchun ikki o`zgaruvchi bo`yicha hosilani topib, ularni nolga tenglashtirib, sistemani yechamiz:

$$z_x = \frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}(x + y^2 + 2) \qquad \begin{cases} \frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}(x + y^2 + 2) = 0 \\ e^{\frac{x}{2}} \cdot 2y = 0 \end{cases}$$

$$\boldsymbol{z_y = e^{\frac{x}{2}} \cdot 2y}$$

Bu sistema $\begin{cases} x + y^2 + 2 = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ sistemaga teng kuchli.

Bu sistemaning yechimi $x = -2$ $y = 0$ bo`ladi. Demak $(-2; 0)$ kritik nuqta. II tartibli hususiy hosilalarni

$$A = z''_{xx} \qquad B = z''_{xy} \qquad C = z''_{yy}$$

Ko`rinishda belgilab,ularni kritik nuqtalardagi qiymatini topamiz:

$$z''_{xx} = \frac{1}{4}e^{\frac{x}{2}}(x + y^2 + 4), \quad z''_{xy} = e^{\frac{x}{2}} \cdot y \qquad z''_{yy} = 2e^{\frac{x}{2}}$$

$$A = \frac{e^{-1}}{2} \qquad B = 0 \quad C = 2e^{-1}$$

E- Conference Series
Open Access | Peer Reviewed | Conference Proceedings
E- CONFERENCE SERIES

ISSN: 2835-5326 Website: econferenceseries.com

Bundan $\Delta = AC - B^2 = \frac{e^{-1}}{2} \cdot 2e^{-1} = e^{-2}$ $\Delta > 0$ bo`lgani uchun $(-2;0)$ da funksiya ekstremumga ega, $A > 0$ bo`lgani uchun $(-2;0)$ nuqtada berilgan funksiya minimumga ega.

Misol. $z = x^2 - xy + y^2 + 9x - 6y + 20$ funksiyani ekstremum nuqtasini toping

Yechish. Dastlab kritik nuqtalarni topamiz. Buning uchun ikki o`zgaruvchi bo`yicha hosilani topib,ularni nolga tenglab, sistemani yechamiz:

$$\begin{cases} z'_x = 2x - y + 9 \\ z'_y = -x + 2y - 6 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x - y + 9 = 0 \\ -x + 2y - 6 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x - y + |9 = 0 \\ -2x + 4y - 12 = 0 \end{cases}$$

$y = 1$ $x = -4$ Bu sistemaning yechimi $(-4;1)$

Nuqta ekan . Bu nuqta kritik nuqtadir.Endi funksiyani II tartibli hosilalarini belgilab olamiz va topilgan kritik nuqtalarda II tartibli hosilani qiymatlarini topib olamiz.

$$A = z''_{xx} = 2 \qquad B = z''_{xy} = -1 \qquad C = z''_{yy} = 2$$

Bundan Δ ni topib olamiz agar $\Delta > 0$ bo`lsa funksiya ekstremumga ega bo`ladi.Shu bilan birgalikda $A > 0$ da minimumga, $A < 0$ da maksimumga ega bo`ladi.
$\Delta = AC - B^2 = 3$ demak , $\Delta > 0$ funksiya ekstremumga ega yuqorida aytib o`tganimizdek $A > 0$ bo`lgani uchun $(-4;\ 1)$ nuqta minimum nuqta ekan.

Foydalanilgan adabiyotlar ro'yxati

1. "Algebra va analiz asoslari 10-11 " (darslik) A.N Kolmogorov, A. M. Abramov . Yu. P. Dudnisin, B .M. Ivlev, S. I. Shvarsburg. Toshkent "o'qituvchi" 1992
2. "Funksiyalar va grafiklar" A. Gaziyev, I. Isroilov, M. Yaxshiboyev " Voris-Nashriyot" Toshkent 2006
3. "Matematik analizdan misol va masalalar yechish" T. Sharipova, E . Yo'ldoshev, "o'qituvchi" Toshkent 1996
4. "Oliy matematika 1" Yo. U. Soatov, Toshkent "o'qituvchi" 1992 - yil
5. "Variatsion hisob va optimal boshqaruv" I. Isroilov, S. Otaqulov Samarqand 2012
6. "Matematikani takrorlang" A. U .Umirbekov, Sh.Sh.Shaabzalov. "o'qituvchi" Toshkent 1989-yil

E- Conference Series
Open Access | Peer Reviewed | Conference Proceedings
E- CONFERENCE SERIES

ISSN: 2835-5326 Website: econferenceseries.com

7. "Matematik analiz 1" Toshmetov O', Turgunbayev R, Saydamatov E, Madirimov M Toshkent "Extremum-press" 2015-yil
8. "Oliy matematika" Sh. I. Tojiyev Toshkent “ O`zbekiston “ 2002-yil

E- Conference Series
Open Access | Peer Reviewed | Conference Proceedings
E- CONFERENCE SERIES