Proceedings of International Conference on Scientific Research in Natural and Social Sciences
Hosted online from Toronto, Canada.
Date: 5th June, 2024
ISSN: 2835-5326 Website: econferenceseries.com

QAVARIQ KO'PYOQLILAR UCHUN EYLER FORMULASINING BA'ZI TATBIQLARI

Bekmatov Dilmurod Shahobiddinovich
Toshkent davlat iqtisodiyot universiteti. Oliy va amaliy matematika kafedrasi

Kalit so'zlar: ko'pyoqlar, qavariqlik, fazo, o'lchov, chegara, ichki nuqta, ko'pburchaklar, uzliksizlik.

Ma'lumki, qavariq ko'pyoqli deb chekli yarim fazolarni chegaralagan va uch o'lchovli kesishmasiga aytiladi . Bu tarifda xar bir yarim fazo uni chegaralovchi tekislikka ega deb hisoblanadi.

Qavariq ko'pyoqlini barcha nuqtalari ichka chegaraviy nuqta larga bo'linadi . Ko'pyoqlining nuqta ichki nuqta deyiladi, agarda markazi bu nuqtada bo'lgan sharga ko'pyoqlining nuqta lari xam uning fazoga nisbatan to'ldiruvchi nuqta lari xam tegishli bo'lsa . Ko'pyoqlini barcha chegaraviy nuqtalari uning chegarasini tashkil qiladi . Bu chegara qavariq ko'pburchaklardan isbot bo'lgan chekli sonli yoqlardan tashkil topadi . Bu ko'pburchaklarni tomonlari va uchlari mos ravishda ko'pyoqlining qirralari va uchlari deyiladi.

Eyler formulasidan quyidagi munosabatlarga ega bo'lamiz

$$\alpha \le \frac{1}{3} \sum_{i\ge 3} i\gamma_i \quad \text{va} \quad \beta \le \frac{1}{2} \sum_{i\ge 3} i\gamma_i$$

α va β ning bu qiymatlarini Eyler formulasigaga qo'ysak

$$\frac{1}{3} \sum_{i\ge 3} i\gamma_i - \frac{1}{2} \sum_{i\ge 3} i\gamma_i + \sum_{i\ge 3} \gamma_i \ge 2$$

yoki

$$6\sum_{i\ge 3} \gamma_i - \sum_{i\ge 3} i\gamma_i \ge 12$$

kelib chiqadi.

Bu erdagi ikkala yig'indida ham γ_3, γ_4 , va γ_5 larga ega hadlarni alohida ajratsak, u holda

$$6(\gamma_3+\gamma_4+\gamma_5)+6\sum_{i\geq 3}\gamma_i-(3\gamma_3+4\gamma_4+5\gamma_5)-\sum_{i\geq 6} i\gamma_i\geq 12$$

yoki

$$3\gamma_3+2\gamma_4+\gamma_5\geq 12+\sum_{i\geq 6}(i-6)\gamma_i$$

Bu tengsizlik o'ng tomonidagi yig'indi manfiy bo'lmaganligi uchun

$3\gamma_3+2\gamma_4+\gamma_5\geq 12$ (1)

So'ngi (1) tengsizlikdan qiziqarli geometirik hulosalar chiqarish mumkin . Bu tengsizlikda malum bo'ladiki qavariq ko'pyoqli albatta yoki uchburchakli yoki to'rtburchakli yoki besh burchakli yoqlarga ega bo'ladi . Masalan barcha yoqlari oltiburchakdan iborat bo'ladi qavariq ko'pyoqli mavjud emas . Xaqiqatdan xam agar $\gamma_4=\gamma_5=0$ deb faraz qilsak (8) tengsizlikda $\gamma_3\geq 4$ tengsizlikka ega bo'lamiz .

Bu tengsizlik to'g'ri , yaniy $\gamma_4=\gamma_5=0$ va $\gamma_3=4$ shartlarini qanoatlantiruvchi ko'pyoqli mavjud –tetraedlar (uchburchakli pramida) . Agar $\gamma_3=\gamma_5=0$ bo'lsa u xolda $\gamma_4\geq 6$. Bu tengsizlik xam to'g'ri . Bu shartlarni qanoatlantiruvchi ko'pyoqli – kub . Agar $\gamma_3=\gamma_4=0$ bo'lsa u xolda (1) dan $\gamma_5\geq 12$. Bu tengsizlikning to'g'riligini dodekaeur misolida ko'rish mumkin.

(1) tengsizlikka dual o'xshash bo'lgan tengsizlik

$3\alpha_3+2\alpha_4+\alpha_5\geq 12$ (2)

ko'rinishda bo'ladi . Bu tengsizlikdan , xar bir uchidan chiquvchi qirralar soni 6 ta bo'lgan ko'pyoqlining mavjud emasligi kelib chiqadi. (2) tekislikda chiziqdan quyidagi natijalarni chiqarish mumkin:

agar $\alpha_4=\gamma_5=0$ bo'lsa, u holda $\alpha_3\geq 4$

agar $\alpha_3=\gamma_5=0$ bo'lsa, u holda $\alpha_4\geq 6$

agar $\alpha_3=\gamma_4=0$ bo'lsa, u holda $\alpha_5\geq 12$

Bu uchta tengsizlik ham to'g'ri bo'lib ularga mos ko'pyoqlilar mos ravishda tetraedr (cheksoedr) aktoedr , va ikosaedrlardir.

Ma'lumki, , o'rta maktab geometriya kursida muntazam ko'pyoqlilarning beshta turi o'rganiladi. O'rta maktab va akademik litseylarning yuqori sinf o'quvchilari matematika fakultetini birinchi kurs talabalariga berilgan "muntazam ko'pyoqlilarning" shulardan boshqa turlari ham mavjudmi degan savolga ulardan aksariyati tayinli javob berishaolmadi . Eyler teoremasinig turlicha isboti mavjud bo'lib ularning bazilari shulardan sodda va tushunarli , ikkinchi, keltirilgan

ISSN: 2835-5326 Website: econferenceseries.com

ko'pyoqlilarning ba'zi turlari ularga boshlang'ich tushunchalardan tanish (kub ,to'g'riburchakli to'rtburchak) qolaversa , muntazam ko'pyoqlilar sonini aniqlovchi Eyler teoremasini natijasi isbotlarining ba'zilarini ham unchalik katta hajmini egallamaydi. Shundanam ko'pyoqlilarning beshtadan ortiq turi mavjud emasligini bir isbotini keltiraylik .

Muntazam ko'pyoqlining yana bir uchidan chiquvchi qirralari soni e, har bir yoqiningtomonlari soni l bo'lsin . U holda ravshanki, $e \geq 3$ va $l \geq 3$.

Ko'pyoqlining har bir yoqining qirralaqri (tomoni) soni e ta , barcha yoqlari soni γ . va har bir qirra ikita yoqqa tegishli bo'lganligi uchun

$$e\gamma = 2\beta$$

Shunga o'xshash ko'pyoqlining har bir uchidan chiquvchi qirralar soni l ta , barcha uchlari soni α va har bir qirra ikkita uchni tutashktirganligidan

$$l\alpha = 2\beta$$

So'nggi ikki tenglikdan va Eyler formulasi (1) dan osongina

$$\alpha = \frac{4l}{2l + 2e - el}, .\ \beta = \frac{2el}{2l + 2e - el}, .\gamma = \frac{4e}{2l + 2e - el}$$

larga ega bo'lamiz. Bu sonlar musbat bo'lganligi uchun

$$2e + 2l - el > 0 \text{ yoki } (e - 2)(l - 2) < 4.$$

$e \geq 3$ va $l \geq 3$ larni etiborga olsak , so'nggi tengsizlikni bu natural sonlarning faqat beshta jufti $(3;3), (3;4), (3;5), (4;3), (5;3)$ qanoatlantirishi kelib chiqadi. Bu shartlarni muntazam ko'pyoqlining beshta turi (muntazan tetraedr, kub, dodekaedr, oktaedr, ikosaedr) mos keladi.

Eyler formulasining tatbiqiga doir bir nechta misollar qaraylik.

Masala 1. Qavariq ko'pyoqlining yoqlari faqat uzliksizlardan iborat . Agar uning qirralari soni 12 ta bo'lsa , uchlari va yoqlari sonini toping.

Echish. ko'pyoqlining yoqlari uchburchaklar va xar bir qirra ikkita uchini tutashtirib turganligi uchun 3_γ=24 bo'ladi . Bu erdan γ=8 γ ning bu qiymatini va qirralar soni β=12 ni (1) formulaga qo'ysak, α=6 kelib chiqadi .

SHunga o'hshash mulohaza yuritib qo'yib masalalarni xam osonroq yechish mumkin .

Masala 2. Har qanday qavariq ko'pyoqli uchun $6\gamma - 12 \geq 2\beta \geq 3\gamma \geq \beta + 6$ tengsizlikning o'rinli ekanligini isbotlang.

ISSN: 2835-5326 Website: econferenceseries.com

Echish. Eyler teoremasidan $6\alpha - 6\beta + 6\gamma = 12$ ga , bu tenglikdan esa $6\gamma - 12 = 6\beta - 6\alpha$ ga ega bo'lamiz. Har qanday qavariq ko'pyoqli uchun $2\beta \geq 3\alpha$ tengsizlik o'rinli . bu ikki munosabat $6\gamma - 12 \geq 2\beta$ kelib chiqadi.

Yuqorida keltirilgan (5) munosabatlardan

$2\beta = 3\gamma_3 + 4\gamma_4 + 5\gamma_5 + \cdots \geq 3(\gamma_3 + \gamma_4 + \gamma_5 + \cdots) = 3\gamma$

kelib chiqadi. Demak, $2\beta \geq 3\gamma$.

Masala 3. Qavariq ko'pyoqli kamida bitta uchburchakli yoqqa yoki kamida bitta uch yoqli burchakka ega bo'lishini isbotlang .

Echish . Eyler formulasidan kelib chiqadigan 4α-4β+4γ=8 tenglikka

$$2\beta=3\gamma_3+4\gamma_4+\gamma_5+\cdots, \qquad \alpha = \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 + \cdots$$

$$2\beta = 3\gamma_3 + 4\gamma_4 + 5\gamma_5 + \cdots, \qquad \gamma = \gamma_3 + \gamma_4 + \gamma_5 + \cdots$$

larni qo'ysak

$$4(\alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 + \cdots) - 3(\alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 + \cdots) - 3(\gamma_3 + \gamma_4 + \gamma_5 + \cdots) + 4(\gamma_3 + \gamma_4 + \gamma_5 + \cdots) = 8$$

Bu erdan $\beta_3 + \gamma_3 \geq 8$ (yana bir xossa).

Eyler fo'rmilasining ko'pburchak tashqi burchaklarining yig'indisi bilan bog'liqligini ko'rsatishga bu fo'rmiladan foydalanib yassi va fazoviy figuralarga doir bir qator masalalarni yechish orqali bu figuralarning elementar geometirya kursida(umum talim maktablari kasib hunar kollejlari va akademek litseylar geometirya kurslarida) o'rganilmaydigan bazi xossalari aniqlangan va kerakli natijalar olingan.

Фойдаланилган адабиётлар

1. Атанасян. Л.С , Базилев В.Т "Геометрия" II –ч. М, Просвещение, 1987.
2. Глберт. Д , Фон- Коссен С. "Наглядная геометрия" М. Наука, 1981.