ISSN: 2835-5326 Website: econferenceseries.com

TO‘PLAMLAR HALQASI, YARIM HALQA, ALGEBRA HAQIDA TUSHUNCHALAR VA ULARNING TATBIQLARI

G`affarova Dilfuza Shavkat qizi
(NavDPI o`qituvchisi)

Ashurova Gulshan Shuhratovna
(NavDPI o`qituvchisi)

Narzullayeva O`g`iloy Bahrom qizi
(NavDPI talabasi)

Tayanch iboralar: To‘plamlar sistemasi, to‘plamlar halqasi, yarim halqa, σ-algebra.

Elementlari to‘plamlardan iborat to‘plam to‘plamlar sistemasi deyiladi. Biz asosan oldindan berilgan X to‘plamning qism to‘plamlaridan iborat sistemalarni qaraymiz. To‘plamlar sistemalarini belgilash uchun biz lotin alifbosining bosh harflaridan foydalanamiz. Bizni asosan to‘plamlar ustidagi ba’zi amallarga nisbatan yopiq bo‘lgan sistemalar qiziqtiradi.

Ta’rif. Agar S to‘plamlar sistemasi simmetrik ayirma va kesishma amallariga nisbatan yopiq, ya’ni ixtiyoriy A, B Î S to‘plamlar uchun ADB Î S va A ÇB Î S bo‘lsa, u holda S to‘plamlar sistemasiga halqa deyiladi.

To‘plamlar halqasining quyidagi xossalarini isbotsiz keltiramiz:.

1-xossa. Agar S to‘plamlar sistemasi halqa bo‘lsa, u holda S birlashma va ayirma amallariga nisbatan ham yopiq bo‘ladi.

2-xossa. Agar S to‘plamlar sistemasi halqa bo‘lsa, u holda S chekli sondagi birlashma va kesishma amallariga nisbatan ham yopiq bo‘ladi.

Agar S to‘plamlar sistemasida shunday E Î S to‘plam mavjud bo‘lib, ixtiyoriy A Î S uchun A Ç$E = A$ bo‘lsa, E to‘plam S sistemaning «birlik elementi» yoki «biri» deyiladi. Sistemaning «biri» deganda shu sistemadagi maksimal to‘plam tushuniladi. Hamma sistemalar ham maksimal to‘plamga ega bo‘lavermaydi. Masalan, natural sonlar to‘plamining barcha chekli qism to‘plamlaridan iborat sistemasida maksimal to‘plam mavjud emas.

ISSN: 2835-5326 Website: econferenceseries.com

Ta'rif. Birlik elementga ega bo'lgan to'plamlar halqasi algebra deyiladi.

1-misol. Ixtiyoriy A to'plam uchun uning barcha qism to'plam-laridan tuzilgan $\mathfrak{A}(A)-$ sistema, biri $E = A$ bo'lgan algebra bo'ladi.

2-misol. Ixtiyoriy A to'plam uchun uning barcha chekli qism to'plamlaridan tuzilgan sistema halqa bo'ladi. Bu halqa algebra bo'lishi uchun A chekli to'plam bo'lishi zarur va yetarli.

3-misol. Ixtiyoriy bo'shmas A to'plam uchun A va $\varnothing$ to'plamlardan tuzilgan $\{A, \varnothing\}$ sistema, biri $E = A$ bo'lgan algebra bo'ladi.

4-misol. Sonlar o'qidagi barcha chegaralangan to'plamlar sistemasi halqa bo'ladi, ammo algebra bo'lmaydi.

Teorema. Ixtiyoriy $\{\mathfrak{R}_a\}$ halqalar sistemasi uchun ularning kesishmasi $\mathfrak{R} = \bigcap\limits_a \mathfrak{R}_a$ yana halqa bo'ladi.

Teorema. Ixtiyoriy bo'shmas $\mathfrak{S}$ to'plamlar sistemasi uchun $\mathfrak{S}$ ni o'zida saqlovchi va $\mathfrak{S}$ ni saqlovchi barcha $\mathfrak{R}$ halqalarda saqlanuvchi yagona $M(\mathfrak{S})$ minimal halqa mavjud.

Ko'pgina masalalarda, masalan, o'lchovlar nazariyasida halqa tushunchasi bilan birgalikda unga nisbatan umumiyroq bo'lgan to'plamlar yarim halqasi tushunchasi ham muhim ahamiyatga ega.

Ta'rif. Agar $\mathfrak{S}$ to'plamlar sistemasi quyidagi shartlarni qanoatlantirsa, unga yarim halqa deyiladi:

a) $\mathfrak{S}$ bo'sh to'plamni saqlaydi;

b) $\mathfrak{S}$ to'plamlar kesishmasi amaliga nisbatan yopiq, ya'ni $A, B \in \mathfrak{S}$ munosabatdan $A \cap B \in \mathfrak{S}$ munosabat kelib chiqadi;

c) $A \in \mathfrak{S}$, $A_1 \in \mathfrak{S}$ va $A_1 \subset A$ ekanligidan $\mathfrak{S}$ sistemaning o'zaro kesishmaydigan $A_2, \ldots, A_n$ cheklita elementlari mavjud bo'lib, $A \setminus A_1 = \bigcup\limits_{k=2}^{n} A_k$ tasvir o'rinli bo'ladi.

Agar A to'plam o'zaro kesishmaydigan $A_1, A_2, \ldots, A_n$ to'plamlar birlashmasidan iborat bo'lsa, bu birlashma A to'plamning «chekli yoyilmasi» deyiladi.

ISSN: 2835-5326 **Website:** econferenceseries.com

Ixtiyoriy $\mathcal{S}$ to‘plamlar halqasi yarim halqa bo‘ladi, chunki A va $A_1 (A_1 \subset A)$ to‘plamlar $\mathcal{S}$ ga tegishli bo‘lsa, u holda $A_2 = A \setminus A_1 \in \mathcal{S}$ bo‘lib, $A = A_1 \cup A_2$ chekli yoyilma o‘rinli bo‘ladi. Demak, har qanday halqa yarim halqa bo‘lar ekan. Quyida biz shunday yarim halqaga misol keltiramizki, u halqa bo‘la olmaydi.

5-misol. Sonlar o‘qidagi barcha $[a, b)$ yarim ochiq intervallar sistemasi- $\mathcal{S}$ yarim halqa bo‘lishini isbotlang.

Isbot. $\mathcal{S}$ bo‘sh $[a, a) = \varnothing$ to‘plamni saqlaydi. $\mathcal{S}$ to‘plamlar kesishmasi amaliga nisbatan yopiq, ya’ni $[a,b), [c,d) \in \mathcal{S}$ munosabatdan $[a, b) \cap [c, d) \in \mathcal{S}$ munosabat kelib chiqadi. $[a, b) \in \mathcal{S}$, $[a_1, b_1) \in \mathcal{S}$ va $[a_1, b_1) \subset [a, b)$ ekanligidan $[a, b) \setminus [a_1, b_1) = [a, a_1) \cup [b_1, b)$ tasvir o‘rinli hamda $[a, a_1)$ va $[b_1, b)$ lar $\mathcal{S}$ ga qarashli. Demak, $\mathcal{S}$ yarim halqa bo‘ladi. Δ

Endi yarim halqalarning ayrim xossalari bilan tanishib chiqamiz.

Lemma. $\mathcal{S}$ yarim halqadan A to‘plam va o‘zaro kesishmaydigan $A_1, A_2, \dots, A_n$ to‘plamlar olingan bo‘lib, ularning har biri A to‘plamda saqlansin. U holda $A_1, A_2, \dots, A_n$ to‘plamlarni $A_{n+1}, \dots A_s$ to‘plamlar bilan A to‘plamning chekli yoyilmasiga qadar to‘ldirish mumkin, ya’ni $A = \bigcup_{k=1}^{s} A_k$.

Lemma. $\mathcal{S}$ yarim halqadan olingan har qanday cheklita $A_1, A_2, \dots, A_n$ to‘plamlar sistemasi uchun $\mathcal{S}$ da shunday o‘zaro kesishmay-digan cheklita $B_1, \dots, B_t$ to‘plamlar sistemasi mavjudki, har bir A_k to‘plam $B_1, \dots, B_t$ to‘plamlardan ba’zilari yordamida

$$A_k = \bigcup_{s \in M_k} B_s \quad , \quad M_k \subset \{1, 2, \dots, t\}.$$

yig‘indi ko‘rinishida tasvirlanadi.

Biz yuqorida ko‘rdikki, ixtiyoriy $\mathcal{S}$ sistema uchun uni o‘zida saqlovchi yagona minimal halqa mavjud. Ammo ixtiyoriy $\mathcal{S}$ sistema uchun $\mathcal{M}(\mathcal{S})$ ni $\mathcal{S}$ bo‘yicha hosil qilish ancha murakkabdir. Agar $\mathcal{S}$ sistema yarim halqa bo‘lsa, $\mathcal{M}(\mathcal{S})$ ni hosil qilish to‘liq sharhlanishi mumkin. Bu savolga quyidagi teorema javob beradi.

ISSN: 2835-5326 Website: econferenceseries.com

Teorema. Agar $\mathfrak{S}$ yarim halqa bo‘lsa, u holda $\mathfrak{M}(\mathfrak{S})$ minimal halqa A_k to‘plamlar $(A_k \in \mathfrak{S})$ bo‘yicha $A = \bigcup_{k=1}^{n} A_k$ chekli yoyilmaga ega bo‘lgan A to‘plamlarning $\mathfrak{X}$ sistemasi bilan ustma-ust tushadi.

Har xil masalalarda, xususan o‘lchovlar nazariyasida, sanoqlita to‘plamlar kesishmasi va yig‘indisini qarashga to‘g‘ri keladi. Shuning uchun, to‘plamlar halqasi tushunchasidan tashqari, quyidagi tushunchalarni ham qarash maqsadga muvofiqdir.

Ta’rif. Agar $\mathfrak{S}$ to‘plamlar halqasi undan olingan ixtiyoriy $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ to‘plamlar ketma-ketligi bilan birgalikda ularning yig‘indisi $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ ni ham o‘zida saqlasa, u holda $\mathfrak{S}$ sistemaga «$\sigma -$ halqa» deyiladi.

Ta’rif. Agar $\mathfrak{S}$ to‘plamlar halqasi undan olingan ixtiyoriy $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ to‘plamlar ketma-ketligi bilan birgalikda ularning kesishmasi $B = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ ni ham o‘zida saqlasa, u holda $\mathfrak{S}$ sistemaga «$\delta -$ halqa» deyiladi.

Ta’rif. Birlik elementli $\sigma -$ halqa «$\sigma -$ algebra» deyiladi. Birlik elementli $\delta -$ halqa esa «$\delta -$ algebra» deyiladi.

Shuni ta’kidlash lozimki,

$$\bigcup_n A_n = E \setminus \bigcap_n (E \setminus A_n), \quad \bigcap_n A_n = E \setminus \bigcup_n (E \setminus A_n)$$

ikkilik munosobatlaridan $\sigma -$ algebra va $\delta -$ algebra tushunchalarining ustma-ust tushishi kelib chiqadi.

A cheksiz to‘plamning barcha qism to‘plamlari sistemasi $\mathfrak{A}(A)$, $\sigma -$ algebra bo‘ladi. Agar biror $\mathfrak{S}$ sistema berilgan bo‘lsa, doim uni saqlovchi $\sigma -$ algebra mavjud. Haqiqatan ham, agar $X = \bigcup_{A \in \mathfrak{S}} A$ desak, X ning barcha qism to‘plamlaridan tuzilgan $\mathfrak{A}(X)$ sistema $\mathfrak{S}$ ni o‘zida saqlovchi $\sigma -$ algebra bo‘ladi. Agar $\mathfrak{B} - \mathfrak{S}$ ni o‘zida saqlovchi biror $\sigma -$ algebra va $\dot{X}$ uning biri bo‘lsa, u holda ixtiyoriy $A \in \mathfrak{S}$ to‘plam $A \subset \dot{X}$ munosabatga bo‘ysunadi, va shunday ekan,

ISSN: 2835-5326 **Website:** econferenceseries.com

$X = \bigcup_{A \in S} \subset \dot{X}$. Agar S ni saqlovchi $B - \sigma -$ algebraning biri $\dot{X}$ uchun $X = \tilde{X}$ munosabat bajarilsa, bu $\sigma -$ algebra (S ga nisbatan) keltirilmaydigan $\sigma -$ algebra deb ataladi.

Teorema. Ixtiyoriy bo‘shmas S to‘plamlar sistemasi uchun (bu sistemaga nisbatan) keltirilmaydigan shunday $B(S)$, $\sigma -$ algebra mavjudki, bu $\sigma -$ algebra S ni saqlaydi va S ni saqlovchi barcha $\sigma -$ algebralarda saqlanadi.

$\sigma -$ algebra S sistema ustiga qurilgan minimal $\sigma -$ algebra deyiladi.

Misol sifatida sonlar o‘qidagi barcha $[a, b]$ kesmalar va $[a, b)$, $(a, b]$ yarim intervallar va (a, b) intervallardan tashkil bo‘lgan S yarim halqani qarasak, u holda S ustida qurilgan minimal $B(S)$, $\sigma -$ algebra elementlari «Borel to‘plamlari» yoki «Borel tipidagi» to‘plamlar deyiladi.

Foydalanilgan adabiyotlar ro`yxati

1. G.Xudayberganov, A.Vorisov,X.Mansurov,B.Shoimqulov Matematik analizdan ma’ruzalar.1T.:«Voris-nashriyot».2010y. 374b.
2. Xudayberganov G., Vorisov A., Mansurov X., Shoimqulov B. Matematik analizdan ma’ruzalar. II T.: «Voris-nashriyot». 2010 y. – 352 b.
3. Аюпов Ш.А., Бердикулов М.А., Тургунбаев Р.М. Функциялар назарияси. Т.: «ЎАЖБНТ» Маркази, 2004у.- 148б.
4. Ayupov Sh.A., Berdiqulov M.A., Turgunbaev R.M. Funksional analiz. T.: TDPU. 2008 y.-136b.
5. Ayupov Sh.A., Berdiqulov M.A., Turgunbaev R.M. Matematik analiz funksional analizga kirish). T.: TDPU. 2014 y.-126b.
6. Ayupov Sh.A., Ibragimov M.M., Kudaybergenov K.K. Funksional analizdan misol va masalalar.Nukus.“Bilim”-2009 y. -302 b.
7. Turgunbayev R. Matematik analiz. 2-qism. T.:TDPU, 2008 y.-136b.
8. Жўраев Т. ва бошқалар. Олий математика асослари. 2-қ. Т.: «Ўзбекистон». 1999.- 303б.

9. Turgunbaev R.,Ismailov Sh.Abdullaev O. Differentsial tenglamalar kursidan misol va masalalar to‘plami.T.:TDPU.2007y.-84 b.
10. Саъдуллаев А. ва бошқ.Математик анализ курсидан мисол ва масалалар тўплами.III қисм.Т.,«Ўзбекистон».2000й.-400б.
11. Архипов Г.И.,Садовничий В.А.,Чубариков Д.И.Лекции по математическому анализу.М.:«Высшая школа».1999 г.–695 с.