Proceedings of International Educators Conference
Hosted online from Rome, Italy.
Date: 25th September - 2024
ISSN: 2835-396X **Website:** econferenceseries.com

О СКОРОСТИ СХОДИМОСТИ В УСИЛЕННОМ ЗАКОНЕ БОЛЬШИХ ЧИСЕЛ ДЛЯ СУММ ПОРЯДКОВЫХ СТАТИСТИК

Болтаева Н. Б.
boltayevan27@gmail.com

Для последовательности действительных чисел положим $f_{nr}(x_1,...,x_n)=x_j$, если $|x_j|$ является r - м максимумом $|x_1|,...,|x_n|$. Более точнее, пусть $m_n(j)$, $1\le j\le n$ - номер x_i удовлетворяющий $|x_i|<|x_j|$, $1\le i\le n$ или $|x_i|=|x_j|$, $1\le i\le j$ и пусть $f_{nr}(x_1,...,x_n)=x_j$, если $m_n(j)=r$. Рассмотрим последовательность независимых, одинаково распределенных случайных величин $\{X_n\}$ с общей функцией распределения $F(x)$ и пусть $\mathrm{F}(x)=P\{|X_j|>x\}$. Введем обозначения

$$X_n^k=f_{nk}(X_1,...,X_n)$$

$$S_n=S_n^{(0)}=\sum_{i=1}^{n}X_i,$$

$$S_n^{(r)}=S_n^{(0)}-\sum_{k=1}^{r}X_n^{(k)}$$

в [1], [2] доказаны теоремы об усиленном законе больших чисел для $S_n^{(r)}$ и в нем установлена оценка скорости сходимости в форме [3]. В [2] М.Мори, Х.Хатори и М.Мейджима доказали следующую теорему.

Теорема[2]. А) Пусть $r\ge 0$ целое число, $\alpha>\frac{1}{2}$, $p\ge 1$. Если существует последовательность чисел $\{a_n\}$ такая, что

$$P_\varepsilon(p,r,\alpha)=\sum_{n=1}^{\infty}n^{p-2}P\left\{\left|S_n^{(r)}-a_n\right|>\varepsilon n^{\alpha}\right\}<\infty,\ \forall\varepsilon>0,$$

то $J(p,r,\alpha)=\int_0^\infty x^{\frac{r+p}{\alpha}-1}\mathrm{F}^{\,r+1}(x)dx<\infty.$

В) Обратно, $J(p,r,\alpha)<\infty\Rightarrow P_\varepsilon(p,r,\alpha)<\infty,\forall\varepsilon>0$. В этом случае последовательность $\{a_n\}$ можно выбрать как $a_n=n\int_{|x|\le n\tau}xdF(x)$, где $\tau>0$. В частности если $\alpha>1$, то $a_n=0$. Если $\frac{1}{2}<\alpha<1$ и $E|X_1|<\infty$, то $a=nEX_1$.

Отметим, что если $J(p,r,\alpha)<\infty$, то

$$x^{\frac{r+p}{\alpha}}\mathrm{F}^{\,r+1}(x)=\frac{r+p}{\alpha}\int_0^x y^{\frac{r+p}{\alpha}}\mathrm{F}^{\,r+1}(y)\left[\frac{\mathrm{F}\,(x)}{\mathrm{F}\,(y)}\right]^{r+1}dy,$$

и следовательно,

$$\lim_{x\to\infty} x^{\frac{r+p}{\alpha}}\mathrm{F}\,\Gamma^{r+1}(x)=0,$$

или

$$\mathrm{F}\,(x)=o(x^{-\frac{r+p}{\alpha(r+1)}}).$$

Так, что если $\frac{1}{2}<\alpha<1$ или $\alpha=1,\;\; p>1,$ то

$$J(p,r,\alpha)<\infty\Rightarrow E(X_1)<\infty.$$

Добавим также, что нетрудно доказать

$$J(p,r,\alpha)<\infty\Leftrightarrow\sum_{n=1}^{\infty}n^{\frac{r+p}{\alpha}-1}\mathrm{F}^{\,r+1}(n\varepsilon)<\infty,\forall\varepsilon>0.$$

В настоящей заметке нас интересует количественная связь между $P_\varepsilon(p,r,\alpha)$ и $J(p,r,\alpha)$. Подобная задача была исследована в [4] и в более общей ситуации в [5], при $r=0$. Случай $r\geq 1$ оставалось мало изученным. Приведем один из результатов данной заметки.

Теорема. Пусть $EX_1=0, EX_1^2=\sigma^2<\infty, J(p,r,\alpha)<\infty, p\geq 1, r\geq 0, \alpha\in[1,2), \beta=\frac{p\alpha}{2\alpha-1}$.

Тогда

$$P_1=(p,r,\alpha)\leq A_1 J(p,r,\alpha)+A_2\sigma^{\frac{2(p\alpha-1)}{2\alpha-1}},$$

где A_1 и A_2 положительные постоянные, явный вид которых, в случае $r=0$ имеет вид

$$A_1=\left(1+\frac{2^{p\alpha-1}}{p\alpha}\right)\beta^p, A_2=e^\beta\beta^\beta\left(\frac{\pi^2}{\sigma}-1\right).$$

Отсюда, в частном случае следует соответствующий результат.

Литературы

[1]. Mori T, Z.Wahr, Geb.T.: The strong law of large numbrs when extreme terms are excluded from sums. 36, 189-194.1976.

[2]. Hatori H, Maejima M, Mori T, Z.Wahr. Geb., T.: Convergence rates in the law of large numbers when extreme terms are excluded. 47, 1-12.1979.

[3]. Baum L, Katz M. Trans. Amer. Math. Soc, 120, 108-123, 1965.

[4]. Chow.Y.S, Lai T.L, Z.Wahr.Geb., 45, 1-19, 1978.

[5]. Гафуров М.У., Кенджаев Р.Х. Докл. АНРУз, сер. “Математика, техн. науки, естествознание” 1, 23-26, 2004.