Proceedings of International Educators Conference
Hosted online from Rome, Italy.
Date: 25th Dec., 2023
ISSN: 2835-396X
Website: econferenceseries.com

ПОНЯТИЕ И ИСТОРИЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА ВТОРОГО РОДА

Ахметов Куанишбек Низамаддинович
преподаватель математики, Ташкентский институт текстильной и легкой промышленности Рес.УЗ. г. Ташкент: don10061992@gmail.com

Тожинорова Махлиё Муроджоновна
преподаватель математики, Ташкентский институт текстильной и легкой промышленности Рес.УЗ. г. Ташкент: mtojinorova@mail.ru

Аннотация
В этих работах история уравнения смешанного типа второго рода и изучены свойства новых классы обобщенных решения, а также приманных этих свойства при решения задачи Коши для вырождающегося уравнения гиперболического типа второго рода и выписывая ее решение в форме, удобной для дальнейших исследовавший различных краевых задач.

Ключевые слова: Обобщенных решения, задачи Коши и уравнения гиперболического типа второго рода.

К началу пятидесятых годов прошлого столетия большее внимание математиков привлекают проблемы корректности краевых задач для вырождающихся дифференциальных уравнений с частными производными различных типов.

В работе М.В.Келдыша[16] впервые было указано существенное влияние младших членов уравнения на постановки краевых задач для вырождающегося эллиптического уравнения.

Пусть D_1 - область, ограниченная отрезком AB оси x и гладкой кривой Г, выходящей из точек A и B, лежащей в полуплоскости $y>0$.

М.В.Келдыш в области D_1 исследовал первую краевую задачу для уравнения

$$y^m u_{yy} + u_{xx} + a(x,y)u_x + b(x,y)u_y + c(x,y)u = 0 \qquad (1.24)$$

Он показал, что постановка первой краевой задачи для уравнения (1.24) зависит от показателя m и поведения коэффициента $b(x,y)$ при $y \to 0$. Если выполнено одно из условий 1) $m<1$; 2) $m=1$, $b(x,0)<1$; 3) $1<m<2$, $b(x,0)\le 0$; 4) $m\ge 2$, $b(x,0)<0$, то граничное условие надо задавать на всей границе Γ области D_1.

Если выполнено одно из условий 1) $m=1$, $b(x,0)\ge 1$; 2) $1<m<2$, $b(x,0)>0$; 4) $m\ge 2$, $b(x,0)\ge 0$ то часть границы, совпадающей с линией вырождения, освобождается от граничного условия, т.е, надо задавать лишь на Γ.

В этих случаях М.В.Келдыш доказал существование и единственность регулярного решения первой краевой задачи для уравнения (1.24).

В случаях, когда задача Дирихле для уравнения (1.24) в области D_1 не всегда разрешима, естественно заменить условие ограниченности $\lim\limits_{y\to 0} u(x,y)$ условием

$$\lim_{y\to 0}\varphi(x,y)u(x,y)=\tau(x), \qquad (1.25)$$

где $\varphi(x,y)$ - известная функция, причем $\lim\limits_{y\to 0}\varphi(x,y)=0$, а $\tau(x)$ - заданная непрерывная функция.

Как нам известно, в такой постановке краевая задача для уравнения (1.24) были впервые сформулировано в работе А.В.Бицадзе [8]. В след за этом работе задача Дирихле с условиям (1.25) была изучена в работах С.А.Терсенова [39], Хоу Чунь-и [45], Ян Гуан-Узинь [47], и Чен Лян-Узинь[46].

Впервые в работе А.В.Бицадзе [5] указал существенное влияние младших членов и порядок вырождение при изучение краевых задач для вырождающегося уравнения гиперболического типа.

Рассмотрим гиперболическое уравнение

$$y^m u_{yy}-u_{xx}+a(x,y)u_x+b(x,y)u_y+c(x,y)u=f(x) \qquad (1.26)$$

в области D_2 - ограниченной характеристиками $AB: y=0$,

$$AC: x-\frac{2}{2-m}y^{\frac{2-m}{2}}=0, \quad BC: x+\frac{2}{2-m}y^{\frac{2-m}{2}}=1 \qquad (1.27)$$

уравнения (1.26) при $y\ge 0$, $AB=\{(x,y):0<x<1, y=0\}$, $C\left(\frac{1}{2};\left(\frac{2-m}{4}\right)^{\frac{2}{2-m}}\right)$.

Из (1.27) видно, что линия параболического вырождения уравнения (1.26) является одновременно его характеристикой. В литературе таких уравнений называется уравнением гиперболического типа второго рода. В этих уравнениях решение $u(x,y)$ и его производная может, вообще говоря, обращаться в бесконечность на параболической линии вырождения.

Заметим, что для уравнения (1.26) при $0<m<1$ задача Коши с начальными данными:

$$\lim_{y\to 0} u(x,y)=\tau(x), \quad 0\le x\le 1, \tag{1.28}$$

$$\lim_{y\to 0} \frac{\partial u(x,y)}{\partial y}=\nu(x), \quad 0<x<1, \tag{1.29}$$

где $\tau(x)$ и $\nu(x)$ - заданные гладкие функции, поставлено корректно. В работе А.В.Бицадзе [7] показал, что если $1\le m<2$, то обычная задача Коши с условиям (1.28), (1.29) не разрешимо.

В работах С.А.Терсенова [38], М.М.Смирнов [34], В.Н.Николенко и И.Х.Хайруллина [23], Сунь Хе – шен [36] изучены задачи Коши с видоизмененными начальными данными (1.25) и

$$\lim_{y\to 0} \psi(x,y)\frac{\partial u}{\partial y}=\nu(x) \tag{1.30}$$

где $\psi(x,y)$ - известная функция, причем $\lim\limits_{y\to 0}\psi(x,y)=0$, а $\nu(x)$ - заданная непрерывная функция.

Приведем один из теорем.

Теорема 1.4 [33], [36]. Пусть коэффициенты и свободный член уравнения (1.26) удовлетворяют следующим условиям:

1) $a(x,y)$, $b(x,y)$, $c(x,y)$ и $f(x,y)$ непрерывны и имеют непрерывные производные первого порядка по x в замкнутой области $\bar{D}_2$;

2) $\lim\limits_{y\to 0} y^{1-m}b(x,y)=\beta(x)$, $\beta(x)$ имеет непрерывные произвоные до третьего порядка и удовлетворяет условию $m-1<\beta(x)<1$ при $1\le m<2$;

3) $\beta(x)-b(x,y)y^{1-m}=O\left(y^{2-m}\right)$.

Тогда существует единственное непрерывное в $\bar{D}_2$ решение уравнения (1.26), имеющее непрерывные производные второго порядка в области D_2, удовлетворяющее начальным данным

$$\lim_{y\to 0} u(x,y)=\tau_1(x), \quad \lim_{y\to 0} y^{\beta(x)}\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}=\nu_1(x) \quad 0\le x\le 1 \qquad (1.31)$$

где $\tau_1(x)$ и $\nu_1(x)$ имеют непрерывные производные до третьего порядка включительно.

Решение задачи Коши (1.26), (1.31) непрерывно зависит от начальных данных. Начиная с работ И.Л. Кароля [14], [15] появился интерес к изучению краевых задач для уравнений эллиптико-гиперболического типа второго рода.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Gellerstedt S. Sur un probleme aux limitespour equation $y^{2m}z_{xx}+z_{yy}=0$. // Arkiv for matematik, astronomiochfysik. 1935. 25**A.** № 10. P. 1-12.
2. Urinov A.K., Okboev A.B. Nonlocal Boundary-Value Problem for a Parabolic-Hyperbolic Equation of the Second Kind. // Lobachevskii Journal of Mathematics. Vol.41. no. 9. 2020. Pp. 1886–1897 .
3. Бейтмен Г. Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. М.: Наука, 1965. Т.2. 296 с.
4. Бейтмен Г. Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. М.: Наука, 1965. Т.1. 296 с.
5. Бицадзе А.В. К теории одного класса уравнений смешанного типа. // Некоторые проблемы математики и механики: Сб. науч. тр. Ленинград, 1970. С. 112-119.
6. Бицадзе А.В. Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка. М.: «Наука». 1966. 204 с.
7. Бицадзе А.В. Некоторые классы уравнений в частных производных. Москва: Наука, 1981. 448 с.
8. Бицадзе А.В. Уравнения смешанного типа. М.: Изд-во АН СССР. 1959. 165 с.
9. Ватсон Дж. Н. Теория бессолевых функций. М.: Издательство ИЛ, 1949. Т.1. 798 с.
10. Векуа И.Н. Обобщенные аналитические функции. М.: Физматгиз. 1959. 628 с.
11. Джураев Т.Д. Краевые задачи для уравнений смешанного и смешанно-составного типа. Ташкент: ФАН. 1979. 240 с.

12. Исамухамедов С.С. Некоторые краевые задачи для уравнений смешанного типа второго рода.: Автореф. канд. дисс. Ташкент. 1975.
13. Исамухамедов С.С., Оромов Ж. О краевых задачах для уравнения смешанного типа второго рода с негладкой линией вырождения.// «Дифференциальные уравнения». **18**(2). 1982. С. 324-334.
14. Кароль И.Л. К теории уравнений смешанного типа.// Докл. АН СССР. 1953. Т.88. № 3. С. 397-400.
15. Кароль И.Л. Об одной краевой задаче для уравнения смешанного эллиптико-гиперболического типа. // Докл. АН СССР. 1953. Т.88. № 2. С. 197-200.
16. Келдыш М.В. О некоторых случаях вырождения уравнений эллиптического типа на границе области. // ДАН СССР. 1951. 77. № 2. С. 181-183.
17. Крикунов Ю.М. Видоизмененная задача Трикоми для уравнения $u_{xx}+yu_{yy}+(-n+1/2)u_y=0$.// Известия вузов, серия Математика. 1979. № 9. С.21-28.
18. Мамадалиев Н.К. О представления, решения видоизмененной задачи Коши. // Сиб. мат. журнал РАН. **41**(5). 2000. С. 1087-1097.
19. Мамадалиев Н.К. Задача Трикоми для сильно-вырождающегося уравнения параболо-гиперболического типа. // Матем. заметки. **66**(3). 1999. С. 385–392; Math. Notes. **66**:3 (3.1999). 310–315.
20. Мирсабуров М., Исламов Н.Б.Об одной задаче с условием Бицадзе-Самарского на параллельных характеристиках для уравнения смешанного типа второго рода.//«Дифференциальные уравнения». **57** (10). 2021. С.1384-1396.
21. Михлин С.Г. Об интегральном уравнении F.TRICOMI // Докл. АН СССР. 1948. Т.59. № 6. С. 1053-1056.
22. Мусхелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука. 1968. С. 512.
23. Николенко В.Н., Хайруллин И.Х., Об одной задаче для уравнения гиперболического типа.// Сб. функц. анализа и теории функций. Казань. 1963. № 1. С. 72-82.
24. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды: Дополнительные главы. М.: Наука. 1986. 801 с.

25. Салахитдинов М.С., ИсамухамедовС.С. Краевые задачи для уравнения смешанного типа второго рода. // Сердика. Българско математическо списанае. 1977. Т.3. С. 181-188.
26. Салахитдинов М.С., Исламов Н. Б. Нелокальная краевая задача сусловием Бицадзе-Самарскогодля уравнения параболо-гиперболического типа второго рода. // Известия вузов. Математика. Россия. 2015. № 6. С. 43-52.
27. Салахитдинов М.С., Исломов Б.И. Уравнения смешанного типа с двумя линиями вырождения. Т.: «Mumtozso'z». 2009. 264 с.
28. Салахитдинов М.С., Мирсабуров М. Нелокальные задачи для уравнений смешанного типа с сингулярными коэффициентами.
Ташкент: «Universitet». 2005. 224 с.
29. Салахитдинов М.С., Уринов А.К. Краевые задачи для уравнений смешанного типа со спектральным параметром Т.: «Фан» 1997. 165 с.
30. СалахитдиновМ.С. Уравнения смешанно-составного типа. Ташкент: Фан, 1974. 156 с.
31. Салохитдинов М.С., Уринов А.К. К спектральной теории уравнений смешанного типа. Ташкент. 2010. 356 с.
32. Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск: Наука и техника. 1987. 688 с.
33.Смирнов М.М. Вырождающиеся эллиптические и гиперболические уравнения. М.: Наука. 1966. 292 с.
34. Смирнов М.М. Уравнение смешанного типа. М.: Высшая школа. 1985. 304 с.
35. Смирнов М.М.Уравнения смешанного типа. М.: Наука. 1970. 296 с.
36. Сунн Хе – шен, О единственности решения вырождающихся уравнений и жесткости поверхности. // ДАН СССР. 1958. Т. 122. № 5.
37. Терсенов С.А. Введение в теорию уравнений вырождающихся на границе. НГУ. 1973. 144с.
38. Терсенов С.А. К теории гиперболических уравнении с данными на линии вырождения типа.// Сибирск. матем. журн. 1961.Т. 2. № 6. С.913-935.
39. Терсенов С.А. Об одном уравнении эллиптического типа, вырождающемся на границе области.// ДАН СССР. 1957. 115. № 4. С. 670-673.

40. Трикоми Ф.О. Лекции по уравнениям в частных производных. М.: Ин.лит. 1957. 443с.
41. Фихтингольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. М.: Наука. Т.III. 1970. 556 с.
42. Франкль Ф.И. Избранные труды по газовой динамике. М.: Наука, 1973. 711 с.
43. Франкль Ф.И. О задачах Чаплыгина для смешанных до- и сверхзвуковых течений. // Изв. АН СССР сер.матем. **9**(2). 1945. С. 121-142.
44. Хайруллин Р.С. Задача Трикоми для уравнения второго рода с сильным вырождением. 2015. Казань. 236 с.
45. ХоуЧунь - и, ЗадачаДирехле для одного класса линейных эллиптических уравнений второго порядка с параболическим вырождением на границе области.// Sc. Rec. new. Ser., 1958. 2. № 8. 244-249.
46. ЧеньЛян – цзинь (Chen Liang - jing), A boundary value problem for the degenerated elliptic equation.// Acta Math. Sinica, 1963. 13. № 3. 332-342.
47. ЯнГуан – цзинь (Yang Quang - jing), Dirichlet problem for a class of equations of degenerated elliptic type.// Acta Math. Sinica. 1962. 12. № 1. 40-46.